**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Кольца и модули

Rings and Modules

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 001236

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Формирование у обучающихся навыков самостоятельного применения понятий и результатов теории колец и модулей, ознакомление обучающихся со взаимосвязями между основными достижениями теории колец и изучением категорий модулей.

Основная задача курса — ввести обучающихся в круг основных идей и методов теории колец и модулей над кольцами, ознакомить их как с классическими, так и современными результатами в этой области.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Владение курсами «Математический анализ», «Функциональный анализ».

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

Обучающиеся должны овладеть теоретическими основами теории колец и модулей, уметь использовать её методы и инструменты в других областях математики.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

Практическое выполнение заданий.

Самостоятельная работа в присутствии преподавателя: индивидуальное изучение методических материалов и рекомендованной литературы.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | | Трудоёмкость |
| лекции | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 6 |  |  |  | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 10 |  | 60 | 2 | |
|  |  |  |  | 10-25 |  |  |  |  | 10-25 |  |  | 10-25 |  |  | 1-1 |  |  |  | |
| ИТОГО |  |  |  | 30 |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 10 |  |  | 2 | |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 6 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

**СОДЕРЖАНИЕ КУРСА**

**РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕЦ И МОДУЛЕЙ**

Категория модулей над кольцом. Прямые произведения и суммы модулей. Условия конечности: нётеровы и артиновы модули и кольца. Композиционный ряд модуля, теорема Жордана-Гёльдера. Теорема Гильберта о базисе. Тензорные произведения модулей и алгебр. Изоморфизм сопряжённости. Радикал Джекобсона, различные его характеризации. Локальные и полулокальные кольца.

**РАЗДЕЛ 2. ГОМОМОРФИЗМЫ МОДУЛЕЙ,**

**ПРОЕКТИВНЫЕ И ИНЪЕКТИВНЫЕ МОДУЛИ**

Гомоморфизмы модулей, теоремы о гомоморфизме. Функтор Hom. Лемма Фиттинга, теорема Крулля-Ремака-Шмидта. Проективные модули, связь со свободными модулями. Проективные модули над локальными кольцами, теорема Капланского. Инъективные модули, инъективная оболочка. Критерий Бэра инъективности модуля. Разложения инъективных модулей над нетёровыми кольцами.

**РАЗДЕЛ 3. АРТИНОВЫ КОЛЬЦА**

Полупростые модули. Классически полупростые кольца и модули над ними. Артиновы простые кольца, теорема Веддербёрна-Артина. Теорема плотности. Описание радикала Джекобсона в случае артинового кольца. Нётеровость артиновых колец. Фробениусовы и квазифробениусовы кольца. Групповые алгебры и представления групп: теорема Машке, необходимое и достаточное условие полупростоты групповой алгебры.

**РАЗДЕЛ 4. ДЕДЕКИНДОВЫ КОЛЬЦА**

Первичные и полупервичные кольца. Некоммутативные дедекиндовы области, дедекиндовы первичные кольца, Морита-эквивалентности между ними. Конечно порождённые модули над дедекиндовыми первичными кольцами: структура свободных от кручения модулей, разложение периодических модулей в прямую сумму циклических подмодулей.

**РАЗДЕЛ 5. НЕТЕРОВЫ КОЛЬЦА, ИХ КОЛЬЦА ЧАСТНЫХ**

Примеры нётеровых колец. Несимметричность условия нетёровости для кольца.

Кольца частных для некоммутативных колец. Правые области Оре как области целостности с правым телом частных. Теорема Голди. Порядки в кольцах частных.  
Наследственные нётеровы кольца: существование артинова кольца частных, разложение в конечную прямую сумму артинова наследственного кольца и наследственных нётеровых первичных колец.

**Перечень примерных вопросов для самостоятельной работы:**

1. Кольца эндоморфизмов как инъективные модули.
2. Дуальность для артиновых колец.
3. Обобщение понятия базиса для проективных модулей.
4. Связь между полулокальностью кольца и конечностью числа его максимальных правых идеалов.
5. Контекст Мориты и свойства колец, инвариантные относительно Морита-эквивалентности.
6. Плоские модули.
7. Наследственные и полунаследственные кольца.
8. Полуцепные нётеровы наследственные кольца.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Практические занятия.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Основная и дополнительная литература.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

В течение учебного года по дисциплине проводятся аудиторные контрольные работы, задаются задачи и упражнения для самостоятельной работы, проводится зачет. В процессе обучения каждый учащийся снабжается набором задач, которые необходимо уметь решать для положительной оценки по аттестации.

Методика проведения зачета.

Зачет проводится в устной или письменной форме. Преподаватели имеют набор контрольных практических и теоретических заданий и тестов для проведения зачета. Зачет выставляется по итогам текущего контроля и результатам решения контрольных заданий и тестов во время проведения промежуточной аттестации.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы зачета не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и обучающийся удаляется с экзамена.

Критерии выставления оценок:

«Зачет» ставится за полностью решенные задания текущего контроля, контрольных тестов и заданий и правильные ответы на дополнительные вопросы преподавателя.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный перечень вопросов к зачету:

1. Прямые произведения и суммы модулей: категорное определение.
2. Подмодули, фактормодули и факторкольца.
3. Свойства нетеровых и артиновых модулей.
4. Композиционный ряд модуля. Теорема Жордана-Гёльдера.
5. Теорема Гильберта о базисе.
6. Тензорные произведения модулей и алгебр, сбалансированные отображения.
7. Изоморфизм сопряжённости.
8. Функторные свойства тензорного произведения.
9. Радикал Джекобсона кольца, различные его характеризации, описание элементов.
10. Локальные кольца, различные их характеризации.
11. Полулокальные кольца.
12. Гомоморфизмы модулей, теоремы о гомоморфизме, кольца эндоморфизмов.
13. Функтор Hom, его свойства.
14. Лемма Фиттинга.
15. Локальность кольца эндоморфизмов неразложимого модуля конечной длины.
16. Разложения модулей с локальными кольцами эндоморфизмов.

Теорема Крулля-Ремака-Шмидта.

1. Проективные модули как прямые слагаемые свободных модулей.
2. Обратимые идеалы области целостности как проективные модули.
3. Проективные модули над локальными кольцами, теорема Капланского.
4. Инъективные модули.
5. Существенные подмодули, инъективная оболочка модуля.
6. Критерий Бэра инъективности модуля.
7. Делимые абелевы группы как инъективные модули над кольцом целых чисел.
8. Разложения инъективных модулей над нетёровыми кольцами. Теорема Фейса-Уолкера.
9. Полупростые модули: разложение в прямую сумму неразложимых модулей.
10. Классически полупростые кольца и модули над ними.
11. Артиновы простые кольца, теорема Веддербёрна-Артина.
12. Теорема плотности.
13. Радикал Джекобсона как наибольший ниль-идеал для артиновых колец.
14. Нётеровость артиновых колец.
15. Фробениусовы и квазифробениусовы кольца.
16. Представления групп как модули над групповыми алгебрами.
17. Теорема Машке, необходимое и достаточное условие полупростоты групповой алгебры.
18. Первичные и полупервичные кольца.
19. Обобщения коммутативных дедекиндовых колец: некоммутативные дедекиндовы области.
20. Дедекиндовы первичные кольца, Морита-эквивалентности между ними.
21. Структура свободных от кручения модулей над дедекиндовыми первичными кольцами.
22. Дедекиндовы первичные кольца: разложение периодических модулей над ними в прямую сумму циклических подмодулей, структура конечно порождённых модулей.
23. Примеры нетеровых колец и односторонне нетеровых колец.
24. Кольца частных для некоммутативных колец: условия Оре, правые области Оре

как области целостности с правым телом частных.

1. Полупервичные кольца Голди, теорема Голди. Порядки в кольцах частных.
2. Существование артинова кольца частных у наследственного нетерова кольца.
3. Разложение наследственного нетерова кольца в конечную прямую сумму артинова наследственного кольца и наследственных нетеровых первичных колец.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

Должны привлекаться преподаватели, имеющие ученую степень доктора или кандидата наук (в том числе степень PhD, прошедшую установленную процедуру признания и установления эквивалентности) и/или ученое звание профессора или доцента.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Стандартно оборудованные лекционные аудитории, должны вмещать поток в соответствии со списком учащихся.

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартное аудиторное оборудование и ПО (аудио-видео проектор для презентаций, компьютеры с пакетами математических и компьютерных программ, доска).

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел, губка, маркер для доски.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. F.Anderson, K.Fuller. Rings and categories of modules. Springer-Verlag,1992.

2. Ф.Каш. Модули и кольца. М.,«Мир»,1981.

3. С.Ленг. Алгебра. М.,«Мир»,1968.

4. К.Фейс. Алгебра: кольца, модули и категории. М.,«Мир»,1977.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. T. Lam. A first course in noncommutative rings. Springer-Verlag,1991.

2. J.McConnell, J.Robson. Noncommutative noetherian rings. Graduate studies in mathematics. vol.30.

3. Р.Пирс. Ассоциативные алгебры. М., «Мир», 1986.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не требуется.

**Раздел 4. Разработчики программы**